Différentielle de l'exponentielle matricielle

Proposition Soit $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $d(\exp)(M) = e^M \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}$ où $\mathrm{ad}\, M : H \longmapsto MH - HM \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Soient $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

On considère les équations différentielles :

$$(S_1) : \begin{cases} f'(t) = Lf(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ f(0) = H \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} g'(t) = e^{tL} H \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

avec $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

⚠ e^{tL} est une fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

de classe C^1 puisque équa diff

Soit f une solution de (S_1), alors :

$$\partial_t \left(e^{-tL} f(t)\right) = e^{-tL} f'(t) - e^{-tL} L f(t) = 0 \text{ par hypothèse}$$

d'où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-tL} f(t) = e^{-0 \times L} f(0) = H$.

La réciproque est immédiate. $\Rightarrow f(t) = (e^{tL}) H$

Pour obtenir g solution de (S_2), on doit intégrer terme à terme la série de l'exponentielle et utiliser la condition initiale. On obtient ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1} L^k}{(k+1)!}\right) H$$

(unicité par C-L) système autonome $\Rightarrow$ OK !

Considérons $f : t \longmapsto e^{tM} H e^{-tM}$ alors :

$$f'(t) = M e^{tM} H e^{-tM} - e^{tM} H e^{-tM} M = \mathrm{ad}\, M\,(f(t)).$$

On obtient d'après ce qui précède avec $L = \mathrm{ad}\, M$,

$$f(t) = e^{t.\mathrm{ad}\, M} H$$

En particulier, pour $t = 1$, $e^M H e^{-M} = e^{\mathrm{ad}\, M}.H$.

On définit $g : t \longmapsto \partial_{u=0} \left(e^{-tM} e^{t(M+uH)}\right)$.

On a alors :

- $g(0) = \partial_{u=0}(I_n) = 0$
- $(t,u) \longmapsto e^{-tM} e^{t(M+uH)} \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ car $\exp \in C^2$

donc par le théorème de Schwarz,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \partial_t \partial_{u=0} \left(e^{-tM} e^{t(M+uH)}\right) \\ &= \partial_{u=0} \partial_t \left(e^{-tM} e^{t(M+uH)}\right) \\ &= \partial_{u=0} \left(-e^{-tM} M e^{t(M+uH)} + e^{-tM} (M+uH) e^{t(M+uH)}\right) \\ &= \partial_{u=0} \left(u e^{-tM} H e^{t(M+uH)}\right) \\ &= e^{-tM} H e^{tM} \end{aligned}$$

d'où : $g'(t) = e^{-t.\mathrm{ad}\, M}.H$

On obtient alors en utilisant le fait que g est solution de (S_2) avec $L = -\mathrm{ad}\, M$ que :

$$\text{pour } t = 1, \quad \partial_{u=0}\left(e^{-M} e^{M+uH}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}\right) H$$

Or $e^{M+uH} = \exp \circ h(u)$ où $h : u \longmapsto M + uH$.

Donc :

$$\partial_u \left(e^{M+uH}\right) = d(\exp)(h(u)) \circ \partial_u(h) = d(\exp)(M+uH)(H)$$

$$\partial_{u=0}\left(e^{-M} e^{M+uH}\right) = e^{-M} d(\exp)(M)(H)$$

Finalement,

$$d(\exp)(M)(H) = e^M \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}\right) H$$